

Többosztályú modell illesztés

Daniel Barath,^{1,2} and Jiri Matas²

¹ Machine Perception Research Laboratory, MTA SZTAKI, Budapest, Hungary

² Centre for Machine Perception, Department of Cybernetics Czech Technical University, Prague, Czech Republic

Abstract

Javasunk egy általános formalizmust, Multi-X, több-osztályú modell-illesztésre – ez a bemeneti adatok több, zajjal szennyezett modellként való értelmezésének problémája, melyek származtathatóak különböző osztályokból. Kiterjesztjük az általánosan használt α -expansion algoritmus-alapú technikát egy új lépéssel a címke térben. Ez az új lépés címkék egy halmazát cseréli le a megfelelő sűrűsödési pontra (ún. mód) a modell paraméter térben, így gyorsabb és robusztusabb optimalizációt elérve. A fő optimalizációs paraméterek, mint például a mód megtalálására vonatkozó küszöb, az algoritmuson belül automatikusan kerülnek beállításra. Ezt feltételezve, hogy outlierok egy csoportja térben összefüggő struktúrát alkothat, javasunk egy kereszt-validáción alapuló módszert a statisztikailag inszignifikáns modellek szűrésére. A javasolt Multi-X algoritmus felülmúlja a state-of-the-art-ot publikusan elérhető adatbázisokon különböző problémákra: homográfia és merev mozgás detekció; mozgás szegmentáció; szimultán sík és henger illesztés; kör és egyenes illesztés.

1. Bevezető

A több-osztályú modell illesztésben, a bemeneti adatokat több, zajjal szennyezett, különböző osztályból származó modellként értelmezzük, például k egyenes és l kör egy 2D éltérképen, k sík és l henger 3D adaton, több homográfia vagy fundamentális mátrix pont-megfeleltetéseken egy nem-merev szinterről (lásd Ábra 1). A robusztusság egy outlier osztály hozzáadásával érhető el.

A multi-modell illesztést már a 60-as évek eleje óta vizsgálják, a Hough transzformáció ^{14,15} volt az első népszerű módszer egy osztályhoz tartozó modellek kinyerésére ^{13,24,31,42}. A széles körben használt megközelítés egyetlen modell megtalálására a RANSAC ¹¹ algoritmus, mely két fő lépést alternál: hipotézis generálás és validálás. Habár a RANSAC kiterjesztése multi-modell illesztésre kevésbé volt sikeres. A szekvenciális RANSAC egymás után találja meg a modelleket mohó stratégiát követve, mely eltávolítja a hozzájuk tartozó inliereket ^{38,17}. Ebben a megközelítésben az adatpontokat az első olyan modellhez illesztjük, amelyhez megfelelően közel vannak, nem a legjobbhöz. A MultiRANSAC ⁴⁴ összetett hipotéziseket formál n modelltől. Amellett, hogy a módszer a priori igényli a szintéren jelenlevő modellek számát, a szignifikánsan meg-

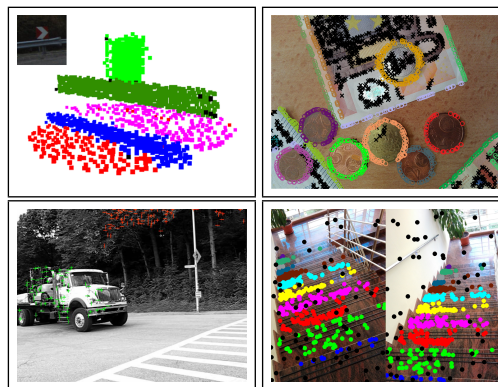


Figure 1: Több-osztályú multi modell illesztési példák. Példák szimultán sík és henger (bal felső), egyenes és kör (jobb felső), mozgás (bal alsó) és homográfia (jobb alsó) szegmentálásra.

növeli a becsléshez szükséges minimális minta méretét és így a validálandó hipotézisek számát.

A legújabb megközelítések ^{16,21,22,23,35} az egy-osztályú esetre fókuszálnak: több modell megtalálása ugyanab-

ból a modell-osztályból. Módszerek egy népszerű csoportja ^{8, 16, 27, 29, 1} egy két lépésből álló folyamatra épít: egy RANSAC-alapú módszerrel kezdeti hipotézisek generálása, majd a pontok modellekhez rendelése egy energia-minimalizáción alapuló optimalizációval gráf-címkézési technikákat felhasználva ². Algoritmusok egy másik csoportja a *preferencia analízis* elvét követi, melyet az RHA ⁴³ módszer vezetett be. Ez a megközelítés az egyes adatpontok modellekhez vonatkozó reziduálisainak eloszlásán alapul ^{21, 22, 35}.

A több-osztályú multi-modell illesztés olyan modellek illesztésének a problémája, melyek nem feltétlenül azonos osztályba tartoznak. Ez az általánosítás lényegesen kevesebb figyelembe részesült, mint az egy-osztályú eset. Legjobb tudásunk szerint, az utolsó jelentős hozzájárulás Stricker és Leonardis ³³ cikke, akik több parametrikus modell szimultán illesztésére javasoltak egy Tabu keresésen alapuló módszert.

A javasolt Multi-H módszer a hagyományos energia-minimalizáció alapú algoritmust bővíti ki egy új lépéssel a címke térben: címkék egy halmazának kicserélése a megfelelő módra a modell parameter térben. A mód keresés jelentősen leszűkíti a címke teret és így felgyorsítja folyamatot. Ezenfelül megoldja a hasonló paraméterekkel rendelkező modellek problémáját, ami egy gyengesége a state-of-the-art módszereknek. Az adatpontok modellekhez rendelésére a Multi-X osztály-specifikus távolság függvényeket használ. A Multi-X tekinthető a Hough transzformáció kiterjesztésének, vagy általánosításának: (1) akkumulátor létrehozása és a lokális maximumok megtalálása nélkül (amik magasabb dimenziós terekben korlátozottan tehetők meg) kinyeri a paraméter térbeli sűrűsödési pontokat, (2) több osztályt kezel – a Hough transzformáció alkalmazása minden modell osztályra parallel vagy szekvenciális módon nehezen kezeli az adatpontokért való versengést és (3) képes modellezni az inlierek térbeli összefüggőségét, vagy magasabb rendű geometriai prior megkötéseket.

A legfrissebb cikkekben ^{21, 23, 39} beszámolt eredmények tesztetesenként hangolva a paramétereket készültek. Az eredmények impresszívek, de a bemenet-specifikus hangolás lényegesen leszűkíti a lehetséges alkalmazásokat. Mi javasolunk a főbb paraméterekre automatikus beállítást, mely a Multi-X-et különböző problémákra fekete-doboz módon (manuális paraméter állítás nélkül) teszi alkalmazhatóvá. Azt feltételezve, hogy outlierok összefüggő struktúrákat alkothatnak, javasolunk egy utófeldolgozási lépést, mely egy kereszt-validáción alapuló módszer modellek törlésére.

A cikk hozzájárulásai: (1) Egy általános formalizmus a több-osztályú multi-modell illesztésre, mely, a legjobb tudásunk szerint, az első ilyen megközelítés. (2) Az általánosan használt energia-minimalizáción alapuló technikát (mely a PEARL ¹⁶ algoritmus által bevezetve) egy új lépéssel bővítjük ki: címkék egy halmazának kicserélése a sűrűségi móddal. Az optimalizáció így felgyorsul, alacsonyabb energiával terminál és az becsült modell-paraméterek pon-

tosabbak. (3) A javasolt pipeline state-of-the-art technikákat kombinál, mint például energia-minimalizáció, medián-alapú mód keresés, kereszt-validáció, annak érdekében, hogy a jelenlegi multi-modell illesztő algoritmusoknál pontosabb eredményt adjon kisebb feldolgozási idő mellett. Az automatikus paraméter beállítás segítségével az algoritmus sokféle valós problémára alkalmazható.

2. Több-osztályú formalizmus

Az általános definíció bemutatása előtt szeretnénk néhány egyszerű példát megnézni multi-modell illesztésre: $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_l$ egyenesek megtalálása melyek magyarázzák a bemeneti 2D pontokat $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. Az egyenes osztály, $\mathcal{H}_l = \{(\theta_l, \phi_l, \tau_l)\}$, az egyenesek tere, ahol $\theta_l = [\alpha \ c]^T$ a paraméter-vektor, $\phi_l(\theta_l, p) = |\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + c|$ egy távolságfüggvény és $\tau_l(p_1, \dots, p_{m_l}) = \theta_l$ egy függvény egyenesek $m_l \in \mathbb{N}$ darab adatpontra való illesztésére – a θ_l vektor kiszámolására. Egy másik egyszerű példa n darab kör $h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathcal{H}_c$ megtalálása 2D pontokon. A kör osztály $\mathcal{H}_c = \{(\theta_c, \phi_c, \tau_c)\}$, ahol $\theta_c = [c_x \ c_y \ r]^T$ az egyes köröket líró paraméter-vektor, $\phi_c(\theta_c, p) = |r - \sqrt{(c_x - x)^2 + (c_y - y)^2}|$ egy távolság függvény és a $\tau_c(p_1, \dots, p_{m_c}) = \theta_c$ egy becslő.

A többszörös egyenes illesztés a $\{h_1, h_2, \dots\} \subseteq \mathcal{H}_l$ egyenesek szimultán kinyerésének problémája, míg a több-osztályú eset a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_\forall$ részhalmaz kinyerése, ahol $\mathcal{H}_\forall = \mathcal{H}_l \cup \mathcal{H}_c \cup \mathcal{H}_o \cup \dots$. A \mathcal{H}_\forall halmaz az összes osztály tere, például egyenesek és körök. A formalizmus tartalmazza a $\mathcal{H}_o = \{(\theta_o, \phi_o, \tau_o), \theta_o = \emptyset\}$ outlier osztályt, ahol minden egyes modellnek konstans, de feltehetőleg különböző távolsága, $\phi_o(\theta_o, p) = k$, van az összes ponttól, ahol $k \in \mathbb{R}^+$ és $\tau_o(p_1, \dots, p_{m_o}) = \emptyset$. Megjegyzés: több outlier osztály feltételezése lehetővé teszi különböző forrásokból származó outlierok modellezését.

Definition 1 (Több-osztályú modell) A több-osztályú modell egy $\mathcal{H}_\forall = \bigcup \mathcal{H}_i$ halmaz, ahol $\mathcal{H}_i = \{(\theta_i, \phi_i, \tau_i) \mid d_i \in \mathbb{N}, \theta_i \in \mathbb{R}^{d_i}, \phi_i \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}, \tau_i : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}\}$ egy i osztály, \mathcal{P} a pontok halmaza, d_i a θ_i paraméter vektor dimenziója, ϕ_i a távolság függvény és a τ_i egy becslő eljárás.

A több-osztályú multi-modell illesztés feladata modellek egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_\forall$ halmazának és egy $L \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$ címkézésnek meghatározása, mely az egyes $p \in \mathcal{P}$ adatpontokat egy $h \in \mathcal{H}$ modellhez rendel olyan módon, hogy minimalizálja az E energia függvényt.

A javasolt módszerben az alábbi energia függvényt használjuk az illesztés minőségének mérésére:

$$E(L) = E_d(L) + w_g E_g(L) + w_c E_c(L). \quad (1)$$

A w_g és w_c súlyok az energia tagok közötti egyensúlyi paraméterek, míg a E_d , E_c és E_g függvények az adat, a komplexitási tag és a geometriai priorokért felelős (pl. térbeli összefüggőség, merőlegesség) energiatagok.

Adattag $E_d : (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ az energia-minimalizáción ala-

puló módszereknél használt energia

$$E_d(L) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \phi_{L(p)}(\theta_{L(p)}, p), \quad (2)$$

a pontok modellekhez rendelkezéséből származó geometriai pontatlanságot bünteti, ahol $\phi_{L(p)}$ a $h_{L(p)}$ modellhez tartozó távolság függvény.

A geometriai kényszerekért felelős energia tag E_g a pontok térbeli összefüggőségét feltételezi, hasonlóan mint a ¹⁶-ben, és magasabb rendű geometriai kényszerek ²⁷ is ezen belül fogalmazhatóak meg, mint például a modellek merőlegessége. A kifejezés, mely azt a feltételezést fogalmazza meg, hogy a szomszédos pontok nagy valószínűséggel tartoznak ugyanahhoz a modellhez az alábbi módon írható le:

$$E_g(L) : (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R} = \sum_{(p,q) \in N} w_{pq} \mathbb{I}[L(p) \neq L(q)], \quad (3)$$

ahol N az élek száma az előre meghatározott szomszédsági gráfban, a $\mathbb{I}[\cdot]$ Iverson zárójel egyenlő egygyel amennyiben a tartalmazott feltétel igaz, ellenkező esetben nulla. A w_{pq} skalár a páronkénti tag súlya. A javasolt algoritmusban $w_{pq} = 1$. Olyan problémák esetén, melyek magasabb rendű geometriai kényszereket igényelnek, például három sík merőlegességét, a E_g felcserélhető a ²⁷-ben javasolttal.

A modellek számát regularizáló kifejezés (amit Delong és mtsái. ⁹ javasoltak) a használt címkék számát büntető formula: $E_c(L) : (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R} = |L(\mathcal{P})|$, ahol a $L(\mathcal{P})$ a L címkézésben szereplő különböző címkék száma. Annak érdekében, hogy több-osztályú modelleket kezelhessünk, melyek különböző, osztály-függő súllyal rendelkezhetnek, az alábbi definíciót javasoljuk:

Definition 2 (Súlyozott Több-osztályú modell) A súlyozott több-osztályú modell egy $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}} = \bigcup \mathcal{H}_i$ halmaz, ahol $\hat{\mathcal{H}}_i = \{(\theta_i, \phi_i, \tau_i, \psi_i) \mid d_i \in \mathbb{N}, \theta_i \in \mathbb{R}^{d_i}, \phi_i \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}, \tau_i : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}, \psi_i \in \mathbb{R}\}$ egy i osztály, \mathcal{P} a pontok halmaza, d_i a θ_i paraméter vektor dimenziója, ϕ_i a távolság függvény, a τ_i egy becslő eljárás és ψ_i az osztályhoz tartozó súly.

A modellek számát kontrolláló kifejezés az E_c helyett az alábbi módon adható meg:

$$\hat{E}_c(L) = \sum_{l \in L(\mathcal{P})} \psi_l, \quad (4)$$

ahol a ψ_l az l címkével meghatározott modellhez tartozó súly.

A ², ³, ⁴ egyenletek kombinálásával az alábbi energia függvény adódik: $\hat{E}(L) = E_d(L) + w_g E_g(L) + w_c \hat{E}_c(L)$.

3. Címke Halmazok Cseréje

Az előzőleg ismertetett energia optimalizációjára a PEARL algoritmust ¹⁶ adoptáljuk. A PEARL algoritmus a RANSAC-hez hasonló módon random mintavételezéssel egy kezdeti modell-halmazt hoz létre, majd két fő lépést alternál konvergenciáig:

(1) Az α -expansion ³ módszer segítségével az L címkézés meghatározása mely minimalizálja az \hat{E} energiát az aktuális modell halmazt figyelembe véve.

(2) A θ modell paraméterek újraszámolása minden egyes \mathcal{H} -beli modellre az L címkézés felhasználásával.

A PEARL formalizmusban, egy címke eltűnésének egyetlen módja amennyiben egyetlen adatpont sem kerül hozzárendelésre. Tapasztalataink alapján ez a megközelítés egyrészt sokszor képtelen a hasonló paraméterekkel rendelkező modelleket törölni, illetve érzékennyé teszi a módszert a w_c címke súly beállítására. Ezért egy új lépést javasolunk a címke térben: címkék egy halmazának kicserélése a megfelelő sűrűségi móddal a modell paraméter térben.

Az energia-minimalizáció alapú multi-modell illesztő technikák általában sok ($|\mathcal{H}| \gg |\mathcal{H}_{\text{real}}|$, ahol $\mathcal{H}_{\text{real}}$ a ground truth halmaz), kezdeti random hipotézist generálnak első lépésként. Így jellemző állapot a sok, hasonló paraméterekkel rendelkező modell. Azt feltételezzük, és igazoljuk tesztekkel, hogy sok pont, mely a keresett $\mathcal{H}_{\text{real}}$ modellekhez tartozik, az inicializációkor a legjobb választás helyett, különböző, hasonló paraméterekkel rendelkező modellhez kerül hozzárendelésre. A ground truth modellek körül sűrűsödő klaszter elemei ekkor kicserélhetők a sűrűsödési ponttra (lásd Fig. 2).

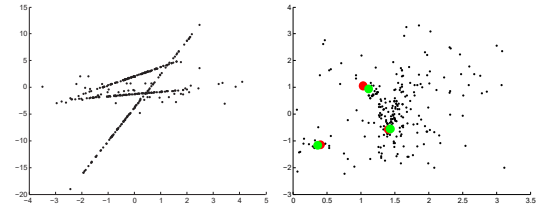


Figure 2: **(Bal)** Három egyenesről mintavételezett 100-100 pont nulla várható értékű Guass-zajjal, plusz 50 outlier. **(Jobb)** 1000 egyenes a paraméter térben (α szög – függőleges, offset – vízszintes tengely) ábrázolva random pontpárokból generálva. A ground truth paraméterek (piros pontok) és a Mean-Shift algoritmus által kinyert módok (zöld pontok).

Adott egy $\Theta : \mathcal{H}_{\mathcal{V}}^* \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{V}}^*$ mód kereső függvény, például Mean-Shift ⁶, amely az i -edik iterációban az input \mathcal{H}_i modell halmazból kinyeri a módokat. A javasolt lépés az alábbi módon történik:

$$\mathcal{H}_{i+1} := \begin{cases} \Theta(\mathcal{H}_i) & \text{ha } E(L_{\Theta(\mathcal{H}_i)}) \leq E(L_i), \\ \mathcal{H}_i & \text{különben,} \end{cases} \quad (5)$$

ahol L_i a címkézést az i -edik iterációban és $L_{\Theta(\mathcal{H}_i)}$ az optimális címkézés, mely a $\Theta(\mathcal{H}_i)$ modellekre vonatkozóan minimalizálja az energiát. Könnyen belátható, hogy a ⁵ egyenlet nem töri meg a konvergenciát, hiszen *akkor és csak akkor* cseréli ki a címke halmazt, amennyiben az

energia nem nő. Megjegyzés: az egyelemű halmazok általában kezelhetők outlierként és törölhetőek. Ez a lépés csökkenti a címkék számát és felgyorsítja a folyamatot.

4. Multi-X

A javasolt módszer, ami a PEARL algoritmust, a többszálú modell illesztést és a javasolt címkétér belüli lépést kombinálja az alábbi algoritmusban látható.

Algorithm 1 Multi-X

Input: P – adatpontok

Output: H^* – modellek, L^* – címkézés

```

1:  $H_0 := \text{InstanceGeneration}(P); i := 1;$ 
2: repeat
3:    $H_i := \text{ModeSeeking}(H_{i-1});$   $\triangleright$  Median-Shift-al
4:    $L_i := \text{Labeling}(H_i, P);$   $\triangleright$   $\alpha$ -expansion-al
5:    $H_i := \text{modellFitting}(H_i, L_i, P);$   $\triangleright$  Weiszfeld
    algoritmussal
6:    $i := i + 1;$ 
7: until !Convergence( $H_i, L_i$ )
8:  $H^* := H_{i-1}, L^* := L_{i-1};$ 
9:  $H^*, L^* := \text{modellValidation}(H^*, L^*)$ 
```

4.0.0.1. 1. A modell generálási lépés egy kezdeti modell halmazt hoz létre mielőtt az alternáló optimalizáció alkalmazásra kerülne. Azt feltételezve, hogy az adatpontok térben összefüggők a NAPSAC ²⁶ módszer által javasolt vezetett mintavételezést alkalmazzuk. Ez a megközelítés kiválaszt egy random pontot, majd a következők az ő szomszédosságából kerülnek kiválasztásra. Ugyanaz a szomszédossági struktúra használható itt, mint a térbeli összefüggőséget preferáló energia tagnál az α -expansion algoritmusban. Megjegyezzük, hogy ez a lépés könnyen kicserélhető más mintavételezésre, pl. PROSAC ⁵, olyan problémák esetén, ahol a térbeli összefüggőség nem áll fenn, vagy degenerált megoldáshoz vezet, pl. fundamentális mátrix becslés.

4.0.0.2. 2. A mód keresési lépés a modell paraméter térben operál. Feltételezzük, hogy adott egy \mathcal{H} modell halmaz. Mivel a megoldások száma – módok száma – ismeretlen, megfelelő választás a Mean-Shift algoritmus ⁶ vagy egy variánsa. Előzetes tesztelés alapján a legrobustabb megoldásnak a Median-Shift ³² algoritmus bizonyult Weiszfeld ⁴⁰ vagy Tukey ³⁷ mediánokkal. A két megoldás között nem volt lényeges különbség, ellenben a Tukey mediánok kicsivel gyorsabban számíthatóak. A Mean-Shift-el ellentétben, a Median-Shift nem hoz létre új elemeket a vektor térbe, hanem mindig a bemeneti halmaz egy elemével tér vissza. Tukey mediánokkal ez robusztusabb mint a Mean-Shift. Ellenben a Locality Sensitive Hashing ⁷ módszert a Fast Approximated Nearest Neighbors ²⁵ algoritmusra cseréltük a gyorsabb feldolgozás érdekében.

Reflektálva a tényre, hogy egy általános *modell-modell* távolság függvény szükséges, mi a modell ponthalmazokkal való reprezentálását javasoljuk, pl. egy egyenes két ponttal, vagy egy homográfia négy megfeleltetéssel. Így a **modell-modell** távolság megfogalmazható ponthalmazok közötti távolságként, amire a Hausdorff-távolság ³⁰ kiváltképp alkalmas. Annak ellenére, hogy ez a megközelítéssel a modellek valamivel több paraméterrel írhatóak le, mint a minimális reprezentáció, így lassítva mód keresést, ez a leírási mód mindig elérhető. Ezenfelül a ponthalmazokkal való leírás megold egy másik nehézséget, miszerint így nem szükséges anizotropikus távolság-függvényt meghatározni a modell paraméter térben.

Természetesen általában sokféle ponthalmazzal írható le ugyanaz a modell, egy kanonikus reprezentáció szükséges. Egyenesek esetén a használt pontok: az origóhoz legközelebbi pont az egyenesen és ettől egy fix távolságra levő másik pont. Homográfák esetén a $\mathbf{H}[0, 0, 1]^T$, $\mathbf{H}[1, 0, 1]^T$, $\mathbf{H}[0, 1, 1]^T$, és $\mathbf{H}[1, 1, 1]^T$ pontokat használjuk.

A Θ_{med} Median-Shift alkalmazása sosem növeli a modellek számát ($|\mathcal{H}_i|$): $|\Theta_{\text{med}}(\mathcal{H}_i)| \leq |\mathcal{H}_i|$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, amennyiben minden lehetséges modell pár között a távolság nagyobb, mint a küszöb. Tapasztalataink alapján a mód-keresési függvény alkalmazása az első iterációban nem csökkenti az eredmény pontosságát, ellenben szignifikánsan gyorsítja az algoritmust még akkor is, ha az energia némileg emelkedik.

4.0.0.3. A címkézési lépés feladata az adatpontok az előző lépésekben meghatározott modellekhez való rendelése. Egy megfelelő választás a feladatra az α -expansion ³ algoritmus, hiszen ez tetszőleges számú címkét képes kezelni. Adott \mathcal{H}_i és egy L_{i-1} kezdeti címkézés az i -edik iterációban. L_i az α -expansion algoritmussal kerül meghatározásra minimalizálva a \hat{E} energiát. Megjegyezzük, hogy L_0 az első lépésben α -expansionnal adódik. A modellek száma ($|\mathcal{H}_i|$) fix ebben a lépésben és az energia mindenképp csökken, vagy nem változik: $\hat{E}(L_i, \mathcal{H}_i) \leq \hat{E}(L_{i-1}, \mathcal{H}_i)$. Annak érdekében, hogy csökkentsük az outlier küszöb beállítására való érzékenységet (ahogy azt az egy-modelles esetben javasolják a ¹⁹-ben), a távolságfüggvényre a *truncated quadratic* hiba-függvényt használjuk.

4.0.0.4. A modell illesztés feladata a paraméterek újraszámolása az illesztett pontok függvényében. A kinyert \mathcal{H}_i modell halmaz újraillesztésre kerül az előző lépésben meghatározott címkézés alapján. Az L_2 illesztés egy megfelelő választás, hiszen a címkézési lépéssel kombinálva ez tekinthető a truncated L_2 normának.

Az energia \hat{E} vagy csökken vagy nem változik ezen lépés következtében, hiszen a három energia tag, amiből áll, a következők: (1) E_d – a hozzárendelési költségek összege, (2) E_g – a címkézés egy függvénye, ami fixnek tekintett ebben a lépésben és (3) \hat{E}_c – ami csak $|\mathcal{H}_i|$ -től függ, tehát \hat{E}_c vál-

tozatlan marad. Ebből következik, hogy

$$\widehat{E}(L_i, \mathcal{H}_{i+1}) \leq \widehat{E}(L_i, \mathcal{H}_i). \quad (6)$$

4.0.0.5. 5. A modell validáció lépés azt feltételezi, hogy az outlierok térben összefüggő struktúrákat alkothatnak. Az algoritmus t -szer kiválaszt egy random minimális mintát az I inlier halmazból. Minden egyes iterációban a kiválasztott mintából kiszámoljuk a modell paramétereit és annak távolságát a többi ponttól. Az eredeti modell stabilnak tekintett, amennyiben a számolt távolságok átlaga kisebb, mint egy γ küszöb. Megjegyezzük, hogy a γ az outlier küszöb, melyet a korábbi fejezetekben is használtunk.

Algorithm 2 Modell Validáció.

Bemenet: I – inlier pontok, t – iteráció szám,
 γ – outlier threshold \triangleright alapbeállítás $t = 100$
Kimenet: $R \in \{\text{true}, \text{false}\}$ – válasz

```

1:  $\widehat{D} := 0$ 
2: for  $i := 1$  to  $t$  do
3:    $MSS := \text{SelectMinimalSubset}(I)$ 
4:    $H := \text{modellEstimation}(MSS)$ 
5:    $\widehat{D} := \widehat{D} + \text{MeanDistanceFromPoints}(H, I) / t$ 
6:  $R := \widehat{D} < \gamma$ 

```

4.0.0.6. Az automatikus paraméter beállítás alapvető fontosságú, hogy a javasolt algoritmus alkalmazható legyen valós problémákra a paraméterek manuális állítása nélkül. A mód-keresésnél használt küszöb beállítására a ¹²-ben javasolt automatikus módszert használjuk, mely az i -edik modellhez tartozó küszöböt ε_i -re állítja, ami annak távolsága a k -adik szomszédjától. Tehát minden egyes modellnek saját küszöb kerül beállításra az input adatok függvényében.

A w_c **címke súlyt** a ²⁷-ben javasolt módon állítjuk be: $w_c = m \log(|\mathcal{P}|) / h_{\max}$, ahol m a minimális minta mérete, $|\mathcal{P}|$ a pont szám és h_{\max} a maximálisan várt modell szám. Megjegyezzük, hogy ennek a súlynak nem szükséges nagy lennie, hiszen a mód-keresés sikeresen elnyomja a hasonló paraméterekkel rendelkező modelleket. Az elsődleges célja ebben az esetben w_c súlynak a kis támogatottsággal rendelkező modellek törlése. Gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a h_{\max} értéke nem korlátozó.

Kísérletek azt mutatták, hogy az inicializáláskor generált **modellek száma** nem befolyásolja szignifikánsan az eredményt. Mi a tesztek alatt azt a ökölszabályt követtük, hogy kétszer annyi modellt generálunk, mint amennyi pont van.

A w_g térbeli összefüggőségi súlyra a 0.3 érték megfelelt. A probléma-specifikus outlier küszöböt a következőképpen állítottuk be: homográfia (2.4 pixel), fundamentális mátrixok (2.0 pixel), egyenesek és körök (2.0 pixel), merev mozgás (2.5), síkok és hengerek (10 cm).

5. Eredmények

Legelőször a javasolt Multi-X-et és a PEARL ¹⁶ algoritmust hasonlítjuk össze. Végül a javasolt algoritmust a számítógépes látás különböző problémáira alkalmazzuk: egyenes és kör illesztés, 3D sík és henger illesztés LIDAR pontfelhőre, homográfia, illetve mozgás szegmentáció.

5.0.0.1. PEARL és Multi-X. Kizárólag az új lépés hatásának bemutatása érdekében a két algoritmus ezen teszt során ugyanazzal az algoritmikus komponensekkel rendelkezik, melyeket az előző fejezetekben ismertettünk. A szintetikus környezet, melyet generáltunk, három 2D egyenesről mintavételezett 100-100 pontot tartalmaz, illetve 200 outliert.

Az **3a.** ábra annak a valószínűségét mutatja, hogy a Multi-X (bal felső) és a PEARL (bal alsó) algoritmusok milyen valószínűséggel térnek vissza egy megadott számú modellel. A függőleges tengely menti számok a modellek számát mutatják. Az ábra jobb oldalán látható színes számok pedig a valószínűségét ($\in [0, 1]$) annak, hogy a módszer annyi modellel tér vissza. Például a piros görbe (melynek a bal oldalán a 3-as szám van) a PEARL esetén közel van a 0.1 valószínűséghez, míg ugyanez a görbe a Multi-X esetén megközelítőleg 0.6 (60%, hogy 3 egyenessel tér vissza). Tehát a javasolt algoritmus nagyobb valószínűséggel tér vissza a várt számú modellel. Továbbá láthatóak még a feldolgozási idő (jobb felső) és a megoldás energiája (jobb alsó). Az értékeket a kezdetben generált modellek számának függvényében számoltuk ki ezen ábrához (vízszintes tengely; a modellek aránya pontok számához viszonyítva). A pontkoordinátákhoz rendelt nulla várható értékű Gauss-zaj szórása 20 pixel volt. Reflektálva arra, hogy a zaj szórása valós probléma esetén nem ismert az outlier küszöböt 6 pixelre állítottuk. Annak érdekében, hogy demonstráljuk, kizárólag címke-súlyok használata nem elég a címkék számának csökkentésére, a súlyt a valós értékre állítottuk, $h_{\max} = 3$. Látható, hogy a Multi-X algoritmus nagyobb valószínűséggel tér vissza az elvárt számú modellel, a feldolgozási ideje kisebb és a megoldás energiája alacsonyabb.

A **3b.** ábra esetén a generált modellek száma kétszere volt a pontokénak és a küszöb 3 pixel volt. A bemutatott értékeket a zaj σ paraméterének függvényében ábráztuk. Hasonló trend látható, mint a **3a.** ábrán: a Multi-X kevésbé érzékeny a zajra, mint a PEARL. Ezenfelül gyakrabban tér vissza a megfelelő számú modellel, a futási ideje és a megoldási energiája alacsonyabb.

5.0.0.2. A szimultán egyenes és kör illesztést bankjegyek és érmék 2D éltérképén értékeltük ki. Az éleket a Canny detektorral nyertük ki és a valós köröket, illetve egyenest manuálisan jelöltük ki az adatban.

Mindegyik módszer ugyanannyi kezdeti modellt generál: a pontok számának kétszerese. A kiértékelt módszerek: a

	(1)		(2)		(3)	
	FP	FN	FP	FN	FP	FN
PEARL ¹⁶	1	0	3	0	5	3
T-Linkage ²¹	0	1	1	3	0	6
RPA ²²	0	1	0	2	0	5
Multi-X	0	0	0	0	0	1

Table 1: A fals pozitív (FP) és fals negatív (FN) modellek száma szimultán egyenes és kör illesztésre.

PEARL ^{8, 16}, T-Linkage ^{21†} és RPA ^{22‡} algoritmusok, melyek tekinthetők a state-of-the-art-nak, illetve az implementációjuk publikusan elérhető. A PEARL és Multi-X algoritmusok szimultán, míg a T-Linkage és RPA pedig szekvenciálisan illesztik a modell osztályokat. A 1. táblázatban láthatóak az egyes módszerek által visszaadott fals negatív and fals pozitív modellek száma. A Multi-X minden esetben a legalacsonyabb hibát vétette.

5.0.0.3. Multi-homográfia illesztést az AdelaideRMF adathalmazon ⁴¹ teszteltünk. Ez az adathalmaz 19 különböző méretű képpárt tartalmaz, illetve mindegyikhez pont megfeleltetéseket, melyek manuálisan síkokhoz (homográfia) lettek rendelve. Kezdeti modell generáláshoz a Barath és mtsai. ¹ által javasolt technikát alkalmaztuk, mely megfeleltetésenként megbecsli a ponthoz tartozó érintősíkot. Az eredmények a 2. táblázatban láthatóak. Az összehasonlított módszerek: PEARL ³, FLOSS ¹⁸, T-Linkage ²¹, ARJMC ²⁸, RCMSA ²⁹, J-Linkage ³⁵, és Multi-X. A state-of-the-arttal való összehasonlítás érdekében mindegyik módszer paraméterei, beleértve a javasoltat, minden tesztre külön lettek hangolva és csak a ²¹-ben használt 6 képpárt vizsgáltuk.

A fix paraméter-beállítást használó eredmények a 3. táblázatban láthatóak (a Multi-X eredményeit kivéve az értékeket a ²²-ből másoltuk). A Multi-X eredménye a legpontosabb. Összehasonlítva a 2. táblázat eredményeivel (ahol a módszereket problémaként hangoltuk), a hibák természetesen jelentősen nagyobbak, ellenben a legtöbb felhasználási területen az automatikus paraméter-beállítás az egyetlen mód. Ezenfelül a képenkénti-beállítás ún. túl tanítás.

5.0.0.4. Kétnézeti mozgás szegmentációt az AdelaideRMF adathalmazon értékeltünk ki, mely 21 különböző

	síkok száma	PEARL ¹⁶	FLOSS ¹⁸	T-Linkg ²¹	ARJMC ²⁸	RCMSA ²⁹	J-Linkg ³⁵	Multi-X
(1)	4	4.02	4.16	4.02	6.48	5.90	5.07	3.75
(2)	6	18.18	18.18	18.17	21.49	17.95	18.33	4.46
(3)	2	5.49	5.91	5.06	5.91	7.17	9.25	0.00
(4)	3	5.39	5.39	3.73	8.81	5.81	3.73	0.00
(5)	2	1.58	1.85	0.26	1.85	2.11	0.27	0.00
(6)	2	0.80	0.80	0.40	0.80	0.80	0.84	0.00
Avg.		5.91	6.05	5.30	7.56	6.62	6.25	1.37
Med.		4.71	4.78	3.87	6.20	5.86	4.40	0.00

Table 2: Homográfia szegmentáció félreosztályozási hibája (%; átlag és medián) az AdelaideRMF adathalmaz képpárjain: (1) johnsonna, (2) johnsonnb, (3) ladysymon, (4) neem, (5) oldclassicswing, (6) sene.

	T-Linkg ²¹	RCMSA ²⁹	RPA ²²	Multi-H ¹	Multi-X
Avg.	44.68	23.17	15.71	14.35	9.72
Med.	44.49	24.53	15.89	9.56	2.49

Table 3: Homográfia szegmentáció félreosztályozási hibája (%; átlag és medián) az AdelaideRMF adathalmaz 19 képpárján fix paramétereket használva.

méretű képet tartalmaz és a ground truth-t – megfeleltetéseket a domináns mozgásukhoz rendelve.

A 5. ábra példa képpárokat mutat a Multi-X-el partícionálva. A különböző mozgásokat színekkel jelöltük. A 4. táblázat a tesztesetenként hangolt tesztek eredményeit mutatja. Az eredmények tíz futtatás átlag és minimum félreosztályozása hibája (százalékosan). A módszerek eredményét (kivéve a javasolt módszerhez tartozót) ³⁹-ből másoltuk. A 5. táblázat a fix paraméterekkel elért eredményeket mutatja. Mindkét teszt típus esetén a Multi-X algoritmus vezetett a legpontosabb eredményekhez.

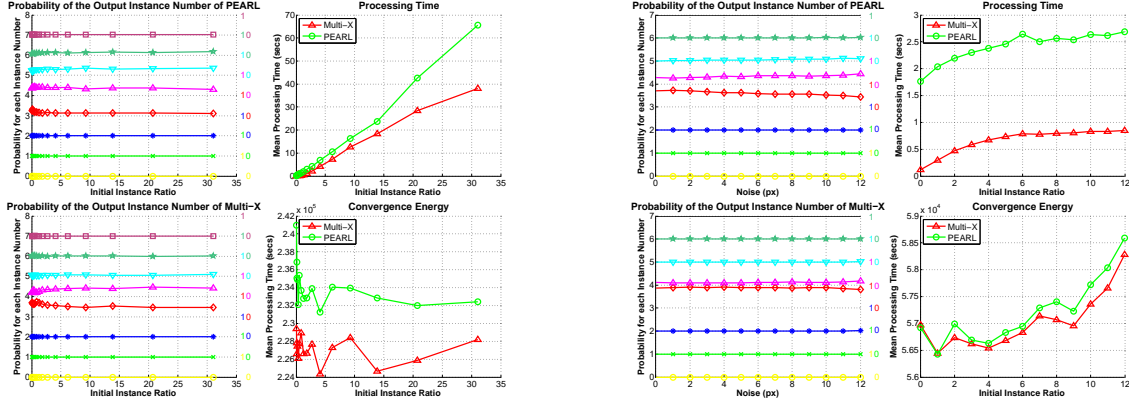
5.0.0.5. Szimultán sík és henger illesztést 3D LIDAR adatokon teszteltünk (lásd 6. ábra). Az annotált adatbázis közlekedési táblákból, azok tartóiból és három méteres sugárban a környezet pontfelhőjéből áll. A pontokat manuálisan síkokhoz és tartókhoz (hengerek) rendeltük.

A Multi-X-et ugyanazokkal a módszerekkel hasonlítottuk össze, mint egyenes- és kör-illesztés esetén. A PEARL és Multi-X algoritmusok szimultán módon, míg a T-Linkage és RPA szekvenciálisan illesztett. A 6. táblázat azt mutatja, hogy a javasolt algoritmus szolgáltatja a legpontosabb eredményeket egy esetet kivéve.

5.0.0.6. Mozgás szegmentációt képszekvencián a Hopkins adathalmaz ³⁶ 51 videóján teszteltük. Mozgás szegmen-

† <http://www.diegm.uniud.it/fusiello/demo/jlk/>

‡ <http://www.diegm.uniud.it/fusiello/demo/rpa/>



(a) *Növekvő kezdeti modellszám.* A pontkoordinátákhoz $\sigma = 20$ szórású nulla várható értékű Gauss-zajt adtunk. **(Bal)** Zero-mean Gaussian noise with $\sigma = 20$ pixels added to the point coordinates. **(Bal)** annak a valószínűsége, hogy a PEARL (felső) vagy a Multi-X (alsó) 0, ..., 7 (függőleges tengely) darab modellel tér vissza a kezdetben generált modellek számának függvényében (vízszintes tengely). **(Jobb):** a futási idő másodpercekben és a konvergenciakor fennálló energia.

(b) *Növekvő zaj.* Az inicializáláskor generált modellek száma a pontszám kétszerese. **(Bal):** annak a valószínűsége, hogy a PEARL (felső) vagy a Multi-X (alsó) 0, ..., 7 (függőleges tengely) darab modellel tér vissza a zaj σ (vízszintes tengely) paraméterének függvényében. **(Jobb):** a futási idő másodpercekben és a konvergenciakor fennálló energia.

Figure 3: A Multi-X és PEARL algoritmusok összehasonlítása. Három random egyenes 100-100 pontja plusz 200 outlier. Az algoritmusok paramétere: $h_{\max} = 3$, és az outlier küszöb (a) 6, illetve (b) 3 pixel.

	KF ⁴		RCG ²⁰		T-Lnkg ²¹		AKSWH ³⁴		MSH ³⁹		Multi-X	
	Avg.	Min.	Avg.	Min.	Avg.	Min.	Avg.	Min.	Avg.	Min.	Avg.	Min.
(1)	8.42	4.23	13.43	9.52	5.63	2.46	4.72	2.11	3.80	2.11	3.45	1.41
(2)	12.53	2.81	13.35	10.92	5.62	4.82	7.23	4.02	3.21	1.61	2.27	0.40
(3)	14.83	4.13	12.60	8.07	4.96	1.32	5.45	1.42	2.69	0.83	1.45	0.41
(4)	13.78	5.10	9.94	3.96	7.32	3.54	7.01	5.18	3.72	1.22	0.61	0.30
(5)	16.87	14.55	26.51	19.54	4.42	4.00	9.04	8.43	6.63	4.55	5.24	1.80
(6)	16.06	14.29	16.87	14.36	1.93	1.16	8.54	4.99	1.54	1.16	0.62	0.00
(7)	33.43	21.30	26.39	20.43	1.06	0.86	7.39	3.41	1.74	0.43	5.32	0.00
(8)	31.07	22.94	37.95	20.80	3.11	3.00	14.95	13.15	4.28	3.57	2.63	1.52

Table 4: Kétnézetes mozgás szegmentáció félreosztályozási hibája (%) az AdelaideRMF adathalmazon. A módszerek a szerzők által egyenként lettek hangolva minden képpárra. A tesztelt képpárok: (1) cubechips, (2) cubetoy, (3) breadcube, (4) gamebiscuit, (5) breadtoycar, (6) biscuitbookbox, (7) breadcubechips, (8) cubebreadtoychips.

	RPA ²²	RCMSA ²⁹	T-Lnkg ²¹	AKSWH ³⁴	Multi-X
Avg.	5.62	9.71	43.83	12.59	2.97
Med.	4.58	8.48	39.42	11.57	0.00

Table 5: Kétnézetes mozgás szegmentáció félreosztályozási hibája (%; átlag és medián) az AdelaideRMF adathalmaz 21 képpárján fix paramétereket használva.

táció videón feladata pontthalmazok csoportosítása és a dom-

ináns merev mozgás kinyerése dinamikus színtéren, mozgó kamera esetén. A feladat tekinthető egy altér szegmentációnak affin kamerákat tekintve. Affin kamerák esetén, minden pont-trajektória egy mozgó objektummal azonosítható egy 4D lineáris altérben \mathbb{R}^{2F} -ben, ahol F a képkockák száma ³⁶.

A 7. táblázat azt mutatja, hogy a javasolt módszer felülmúlja a state-of-the-art-ot: SSC ¹⁰, T-Linkage ²¹, RPA ²², Grdy-RansaCov ²³, ILP-RansaCov ²³ és J-Linkage ³⁵. Az eredményeket, Multi-X-et kivéve, ²³-ból másoltuk. A 5. ábra a tesztelt videók két jelenetét mutatja.

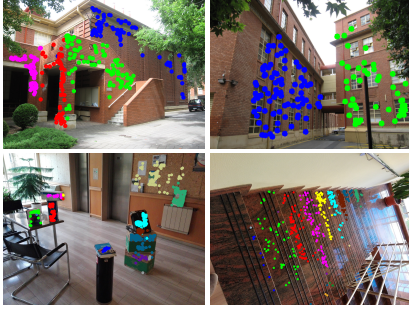


Figure 4: AdelaideRMF (felső) és Multi-H (alsó) példák. A színek a síkokat jelölik, amihez a Multi-X rendelte a pontokat.

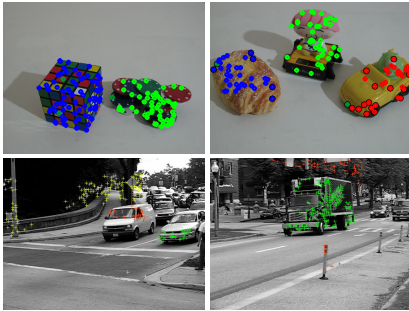


Figure 5: AdelaideRMF (felső) és Hopkins (alsó) példák. A színek a mozgásokat jelölik, amihez a Multi-X rendelte a pontokat.

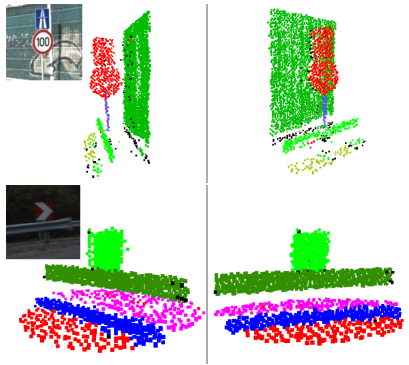


Figure 6: Példa eredmények szimultán sík és henger illesztésre. A szintereket különböző szemszögekből mutatjuk be. A színek a Multi-X által illesztett modelleket jelölik.

	PEARL ¹⁶	T-Lnkg ²¹	RPA ²²	Multi-X
(1)	10.63	57.46	46.83	8.89
(2)	10.88	41.79	53.39	4.72
(3)	37.34	52.97	61.64	2.84
(4)	38.13	38.91	41.41	19.38
(5)	17.20	51.83	53.34	16.83
(6)	17.35	61.77	51.21	21.72
(7)	6.12	12.49	80.45	5.72

Table 6: LIDAR adatra való szimultán sík és henger illesztés félreosztályozási hibája (%). Lásd 6. ábra példákért.

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
SSC ¹⁰	Avg.	0.06	0.76	3.95	2.13	1.08
	Med.	0.00	0.00	0.00	2.13	0.00
T-Lnkg ²¹	Avg.	1.31	0.48	6.47	5.32	2.47
	Med.	0.00	0.19	2.38	5.32	0.00
RPA ²²	Avg.	0.14	0.19	4.41	9.11	1.42
	Med.	0.00	0.00	2.44	9.11	0.00
Grdy-RC ²³	Avg.	7.48	28.65	8.75	14.89	10.91
	Med.	0.00	1.53	0.20	14.89	0.00
ILP-RC ²³	Avg.	0.54	0.35	2.40	2.13	0.98
	Med.	0.00	0.19	1.30	2.13	0.00
J-Lnkg ³⁵	Avg.	1.75	1.58	5.32	6.91	2.70
	Med.	0.00	0.34	1.30	6.91	0.00
Multi-X	Avg.	0.05	0.09	0.32	1.06	0.16
	Med.	0.00	0.00	0.00	1.06	0.00

Table 7: Multi-mozgás illesztés félreosztályozási hibája (%), átlag és medián) a Hopkins adathalmaz 51 videóján: (1) Traffic2 – 2 mozgás, 31 videó, (2) Traffic3 – 3 mozgás, 7 videó, (3) Others2 – 2 mozgás, 11 videó, (4) Others3 – 3 mozgás, 2 videó, (5) Összes – 51 videó.

5.1. Feldolgozási idő

A Multi-X algoritmus nagyságrendekkel gyorsabb, mint a J-Linkage, T-Linkage és RPA módszerek jelenleg elérhető Matlab implementációi. Hasonló technikával megközelítve a problémát (PEARL vagy SA-RCM), a javasolt módszer a címkék számának nagymértékű csökkenése miatt gyorsabb feldolgozást ígér (lásd 8. táblázat).

6. Konklúzió

Egy újszerű többsztályú multi-modell illesztő algoritmust javasoltunk. Ez a módszer kiterjeszti a hagyományos energia-minimalizáló eljárásokat egy új lépéssel a címke térben: címkék egy halmazának kicserélése a sűrűségi móddal a modell paraméter térben. Az algoritmus kulcs paramétereit adaptívan állítjuk be, így lehetővé téve az al-

#	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)	
	M	T	M	T	M	T	M	T	M	T
100	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1	0.3	0.0	0.2	0.1	0.4
500	2.0	14.0	3.2	8.4	2.1	8.4	0.8	7.0	3.8	15.9
1000	5.1	102.8	-	-	-	-	-	-	7.5	120.9

Table 8: A Multi-X (M) és T-Linkage (T) módszerek futási ideje (1) egyenes és kör, (2) homográfia, (3) kétnézetes mozgás, (4) merev mozgás és (5) sík plusz henger illesztés esetén. Az adatpontok száma az első oszlopban látható.

kalmazását különböző, valós problémákra. Az algoritmus felülmúlja a state-of-the-art-ot homográfia, merev mozgás, szimultán sík és henger illesztés; mozgás szegmentáció; 2D él-értelmezés (körök és egyenesek) esetén. A módszer futási ideje megközelítőleg lineárisan függ a pontok számától és nagyságrendekkel kisebb, mint az általánosan használt algoritmusoké.

7. Köszönetnyilvánítás

Az emberi erőforrások minisztériuma ÚNKP-17-3 kód-számú új nemzeti kiválóság programjának támogatásával készült.

References

1. D. Barath, J. Matas, and L. Hajder. Multi-H: Efficient recovery of tangent planes in stereo images. In *British Machine Vision Conference*, 2016. 2, 6
2. Y. Boykov and V. Kolmogorov. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004. 2
3. Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001. 3, 4, 6
4. T.-J. Chin, H. Wang, and D. Suter. Robust fitting of multiple structures: The statistical learning approach. In *International Conference on Computer Vision*, 2009. 7
5. O. Chum and J. Matas. Matching with PROSAC-progressive sample consensus. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE, 2005. 4
6. D. Comaniciu and P. Meer. Mean shift: A robust approach toward feature space analysis. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002. 3, 4
7. M. Datar, N. Immorlica, P. Indyk, and V. S. Mirrokni. Locality-sensitive hashing scheme based on p-stable distributions. In *SoCG*, 2004. 4
8. A. Delong, L. Gorelick, O. Veksler, and Y. Boykov. Minimizing energies with hierarchical costs. *International Journal of Computer Vision*, 2012. 2, 6
9. A. Delong, A. Osokin, H. N. Isack, and Y. Boykov. Fast approximate energy minimization with label costs. *International journal of computer vision*, 2012. 3
10. E. Elhamifar and R. Vidal. Sparse subspace clustering. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009. 7, 8
11. M. A. Fischler and R. C. Bolles. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981. 1
12. B. Georgescu, I. Shimshoni, and P. Meer. Mean shift based clustering in high dimensions: A texture classification example. In *International Conference on Computer Vision*, 2003. 5
13. N. Guil and E. L. Zapata. Lower order circle and ellipse hough transform. *Pattern Recognition*, 1997. 1
14. P. V. C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns, 1962. 1
15. J. Illingworth and J. Kittler. A survey of the hough transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1988. 1
16. H. Isack and Y. Boykov. Energy-based geometric multi-model fitting. *International Journal on Computer Vision*, 2012. 1, 2, 3, 5, 6, 8
17. Y. Kanazawa and H. Kawakami. Detection of planar regions with uncalibrated stereo using distributions of feature points. In *British Machine Vision Conference*, 2004. 1
18. N. Lazić, I. Givoni, B. Frey, and P. Aarabi. Floss: Facility location for subspace segmentation. In *International Conference on Computer Vision*, 2009. 6
19. K. Lebeda, J. Matas, and O. Chum. Fixing the locally optimized RANSAC. In *British Machine Vision Conference*, 2012. 4
20. H. Liu and S. Yan. Efficient structure detection via random consensus graph. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2012. 7
21. L. Magri and A. Fusiello. T-Linkage: A continuous relaxation of J-Linkage for multi-model fitting. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014. 1, 2, 6, 7, 8
22. L. Magri and A. Fusiello. Robust multiple model fitting with preference analysis and low-rank approximation. In *British Machine Vision Conference*, 2015. 1, 2, 6, 7, 8
23. L. Magri and A. Fusiello. Multiple model fitting as a set

- coverage problem. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2016. 1, 2, 7, 8
24. J. Matas, C. Galambos, and J. Kittler. Robust detection of lines using the progressive probabilistic hough transform. *Computer Vision and Image Understanding*, 2000. 1
 25. M. Muja and D. G. Lowe. Fast approximate nearest neighbors with automatic algorithm configuration. *International Conference on Computer Vision Theory and Applications*, 2009. 4
 26. D. Nasuto and J. M. B. R. Craddock. NAPSAC: High noise, high dimensional robust estimation - it's in the bag. 2002. 4
 27. T. T. Pham, T.-J. Chin, K. Schindler, and D. Suter. Interacting geometric priors for robust multi-model fitting. *TIP*, 2014. 2, 3, 5
 28. T. T. Pham, T.-J. Chin, J. Yu, and D. Suter. Simultaneous sampling and multi-structure fitting with adaptive reversible jump mcmc. In *Annual Conference on Neural Information Processing Systems*, 2011. 6
 29. T. T. Pham, T.-J. Chin, J. Yu, and D. Suter. The random cluster model for robust geometric fitting. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2014. 2, 6, 7
 30. R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*. Springer Science & Business Media, 2009. 4
 31. P. L. Rosin. Ellipse fitting by accumulating five-point fits. *Pattern Recognition Letters*, 1993. 1
 32. L. Shapira, S. Avidan, and A. Shamir. Mode-detection via median-shift. In *International Conference on Computer Vision*, 2009. 4
 33. M. Stricker and A. Leonardis. ExSel++: A general framework to extract parametric models. In *International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns*, 1995. 2
 34. J.-P. Tardif. Non-iterative approach for fast and accurate vanishing point detection. In *International Conference on Computer Vision*, 2009. 7
 35. R. Toldo and A. Fusiello. Robust multiple structures estimation with j-linkage. In *European Conference on Computer Vision*, 2008. 1, 2, 6, 7, 8
 36. R. Tron and R. Vidal. A benchmark for the comparison of 3-d motion segmentation algorithms. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007. 6, 7
 37. J. W. Tukey. Mathematics and the picturing of data. In *ICM*, 1975. 4
 38. E. Vincent and R. Laganière. Detecting planar homographies in an image pair. In *International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, 2001. 1
 39. H. Wang, G. Xiao, Y. Yan, and D. Suter. Mode-seeking on hypergraphs for robust geometric model fitting. In *International Conference of Computer Vision*, 2015. 2, 6, 7
 40. E. Weiszfeld. Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. *Tohoku Mathematical Journal*, 1937. 4
 41. H. S. Wong, T.-J. Chin, J. Yu, and D. Suter. Dynamic and hierarchical multi-structure geometric model fitting. In *International Conference on Computer Vision*, 2011. 6
 42. L. Xu, E. Oja, and P. Kultanen. A new curve detection method: randomized hough transform (rht). *Pattern Recognition Letters*, 1990. 1
 43. W. Zhang and J. Kosecká. Nonparametric estimation of multiple structures with outliers. In *Dynamical Vision*. 2007. 2
 44. M. Zuliani, C. S. Kenney, and B. Manjunath. The multiransac algorithm and its application to detect planar homographies. In *ICIP. IEEE*, 2005. 1